Das Bertrandsche Postulat

Marvin Ohst

16. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im gesamten Beweis über stehe $n \in \mathbb{N}$ für eine natürliche Zahl und $p \in \mathbb{P}$ für eine Primzahl.

Wir haben bereits gesehen, dass die Primzahlen eine unendliche Folge bilden. Daraus kann man sich beliebig große Lücken zwischen diesen bilden.
Sei

$$N := \prod_{2 \leq p \leq k+1} p$$

das Produkt der Primzahlen im Intervall $[2, k+1]$. Dann ist keine der k Zahlen

$$N+2, N+3, N+4, ..., N+k, N+(k+1)$$

prim, da sich je beide Summanden von einem Eintrag einen Primfaktor kleiner gleich $k+1$ teilen, der dann auch folglich den ganzen Eintrag teilt.
Folglich bildet diese Zahlenfolge eine Lücke mindestens von Größe k.

Dennoch gibt es obere Schranken für die Größe der Lücken, abhängig von n. Darüber gibt das Bertrandsche Postulat eine Aussage:

„Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$. “

Dieses wurde 1845 von Joseph Bertrand aufgestellt und bis $n = 3000000$ verifiziert. Im Jahre 1850 hat es Pafnuty Tschebyschew zuerst vollständig bewiesen. Der folgende Beweis ist von Paul Erdős, aus seinem ersten Aufsatz im Jahre 1932.

2 Beweis

2.1 „Landau-Trick“ für $n \leq 511$

Man betrachte die Folge der elf Primzahlen:

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 521$$

In dieser ist jede kleiner als das Doppelte der vorherigen, also enthält jedes Intervall $(n, 2n]$ mindestens eine dieser Primzahlen.

2.2 Hilfssatz über das Produkt von Primzahlen

Man beweise, dass für das Produkt aller Primzahlen p kleiner gleich eine reellen Zahl $x \geq 2$ gilt, dass

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}. \tag{1}$$

Dazu beobachtet man zunächst, dass für die größte Primzahl $q \leq x$ gilt:

$$\prod_{p \leq q} p = \prod_{p \leq x} p \qquad \text{und} \qquad 4^{q-1} \leq 4^{x-1}.$$

Es reicht also, (1) für den Fall $x = q$ Primzahl zu beweisen.
Im Induktionsanfang $q = 2$ ist die Aussage $2 \leq 4$.

Betrachte also nun ungerade Primzahlen der Form $q = 2m + 1$ und die Aussage gelte für alle ganzen Zahlen in $\{2, 3, 4, ..., 2m\}$.
Man könnte die Aussage sogar für alle reellen $x < q$ annehmen, dies wird hier aber nicht benötigt.

Teile das Produkt $\prod_{p \leq 2m+1} p$ auf und schätze die einzelnen Faktoren nach oben ab:

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \overbrace{\leq}^{i)} 4^m \binom{2m+1}{m} \overbrace{\leq}^{ii)} 4^m 2^{2m} = 4^{2m}$$

Erster Faktor von $i)$ $\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$ gilt nach Induktionsvoraussetzung.
Zweiter Faktor von $i)$ folgt aus der Beobachtung, dass $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ eine natürliche Zahl ist mit:

$$\overbrace{(2m+1)!}^{a)} = \overbrace{\binom{2m+1}{m}}^{b)} \cdot \overbrace{m!(m+1)!}^{c)}$$

a) Alle Primfaktoren des Produktes $\prod_{p \leq m+1} p$ tauchen hier auf.

c) Keine Primfaktoren des Produktes tauchen hier auf.

b) Also müssen alle Primfaktoren, und damit auch alle Faktoren des Produktes, hier auftauchen.

Da der Binomialkoeffizient $\binom{2m+1}{m}$ also mithilfe der Primfaktorzerlegung als Produkt von natürlichen Zahlen geschrieben werden kann, das alle Faktoren des Produktes $\prod_{p \leq m+1} p$ enthält, muss $\prod_{p \leq m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$.

Schließlich gilt $ii)$ $\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$, da die beiden Binomialkoeffizienten

$$\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$$

in der Summe von positiven Zahlen

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

vorkommen. Also ist

$$2\binom{2m+1}{m} \leq \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1} = 2 \cdot 2^{2m}.$$

Zur Wiederholung:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^n 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Damit ist (1) gezeigt.

2.3 Primfaktoren von $\binom{2n}{n}$

Zeige zunächst den Satz von Legendre:

$$\text{n! enthält den Primfaktor p genau } \alpha_p = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \text{ Mal}$$

Denn:

Genau $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ Faktoren in $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ sind durch p teilbar

Genau $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ Faktoren in $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ sind durch p^2 teilbar

$\vdots$

Dies lässt sich an einem Beispiel veranschaulichen:

Sei $p = 2$ und $n = 12$. Zähle, wie oft die Potenzen von p die Faktoren von n! teilen:

Faktoren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Anzahl
$p = 2$		$\vert$		$\vert$		$\vert$		$\vert$		$\vert$		$\vert$	$6 = \lfloor \frac{12}{2} \rfloor$
$p^2 = 4$				$\vert$				$\vert$				$\vert$	$3 = \lfloor \frac{12}{4} \rfloor$
$p^3 = 8$								$\vert$					$1 = \lfloor \frac{12}{8} \rfloor$
$p^4 = 16$													$0 = \lfloor \frac{12}{16} \rfloor$

Insgesamt teilt 2 den Faktor 12! also $6 + 3 + 1 = 10$ Mal.
Anhand dieser Tabelle lässt sich auch erkennen, warum abgerundet wird - Faktoren größer n werden am Ende abgeschnitten. Dadurch wird die Summe auch endlich, sobald $p^k > n$ ist $\frac{n}{p^k} < 1$ und damit $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor = 0$.

Betrachte nun den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$. Teilt man Zähler und Nenner in Primfaktoren auf und kürzt die p heraus, die in beiden vorkommen, lässt sich mit dem Satz von Legendre sehen, dass p den gesamten Term genau

$$\beta_p := \sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

Mal teilt.
Dieses β_p ist der Exponent in der Primfaktorzerlegung von $\binom{2n}{n}$:
Da $\binom{2n}{n} \in \mathbb{N}$ gibt es für jedes $p \in \mathbb{P}$ einen eindeutigen Exponenten $\beta_p \in \mathbb{N}_0$ sodass

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}.$$

Dabei ist $\beta_p \geq 0$, da ansonsten p den Nenner öfters teilt als den Zähler. Da p eine Primzahl ist, wäre $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ dann keine ganze Zahl, was ein Widerspruch ist.
Außerdem ist jeder Summand höchstens 1, da sie ganze Zahlen sind mit

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2 \overbrace{\left(\frac{n}{p^k} - 1 \right)}^{a)} = 2.$$

Durch die Abschätzung wird der Eintrag a) kleiner, da $\lfloor x \rfloor > x - 1$. Mit negativem Vorzeichen wird dieser dann größer.

Da also alle Summanden von β_p entweder 0 oder 1 sind, kann man β_p nach oben mit der Anzahl seiner Summanden abschätzen.
Über diese kann man sehen, dass sobald $p^k > 2n$ wird, ist $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.
Dann verschwinden also die Summanden und p^k teilt $\binom{2n}{n}$ nicht mehr.
Damit ist

$$\beta_p \leq \max\{k : p^k \leq 2n\}$$

$\rightarrow p > \sqrt{2n}$ kommen höchstens einmal in der Primfaktorzerlegung vor.

Außerdem teilen Primzahlen im Bereich $\frac{2}{3}n < p \leq n$ den Binomialkoeffizienten gar nicht:
Sei $n \geq 3$. (Da die Aussage bereits für $n \leq 511$ bewiesen wurde, ist diese Annahme kein Problem)
Es folgt $2 \leq \frac{2}{3}n < p$ also auch $p \geq 3$.
Betrachte wieder Zähler und Nenner von $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$:

$$\begin{aligned}
p \leq n, 2p \leq 2n \quad &\rightarrow \quad p, 2p \text{ tauchen als Faktoren in } (2n)! \text{ auf.}\\
3p > 2n \quad &\rightarrow \quad 3p \text{ taucht nicht als Faktor in } (2n)! \text{ auf, da } p \text{ Primzahl.}\\
& \qquad\;\; \text{Höhere } k \cdot p \text{ dann auch nicht. Da } p \geq 3\\
& \qquad\;\; \text{tauchen } p^2 \text{ und höhere Potenzen ebenfalls nicht auf.}\\
2p > \frac{4}{3} > n \quad &\rightarrow \quad 2p \text{ taucht nicht in } n! \text{ auf, } p \text{ aber schon.}
\end{aligned}$$

Insgesamt hat also:

der Zähler $(2n)!$ genau zwei p-Faktoren: $p, 2p$

der Nenner $n!n!$ genau zwei p-Faktoren: p, p

Da sie sich infolgedessen herauskürzen, teilt p den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ gar nicht, also $\beta_p = 0$.
Die Annahme $n \geq 3$ wurde gemacht, da für $p = 2$ der Zähler drei p-Faktoren hat, womit p den Binomialkoeffizienten teilt.

Ergebnisse über Primfaktoren p von $\binom{2n}{n}$:

I) $p^{\beta_p} \leq 2n$.
Also ist die größte Potenz von p, die $\binom{2n}{n}$ teilt, kleiner gleich $2n$.
Folglich ist $p > 2n$ kein Primfaktor.

II) Für $\sqrt{2n} < p$ ist $\beta_p \leq 1$.
Für $n < p$ auch $(n \geq 512)$

III) Für $\frac{2}{3}n < p \leq n$ ist $\beta_p = 0$.

2.4 Abschätzung von $\binom{2n}{n}$

Schätze $\binom{2n}{n}$ nach unten ab, dazu betrachte zunächst $\binom{n}{k}$.
Der mittlere Binomialkoeffizient $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$ ist der größte Eintrag in der Folge von Länge n:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{n}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n-1}$$

Damit ist dieser für $n \geq 2$ größer gleich dem Mittelwert (Summe ist 2^n, siehe Ende 2.2)

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq \frac{2^n}{n}$$

Ersetze n durch $2n$:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$$

Damit hat man eine untere Schranke für $\binom{2n}{n}$ gefunden.
Schätze diesen nun nach oben ab. Betrachte dazu Primfaktoren, spalte das Produkt in drei Teile, und schätze diese mit I), II), III) aus 2.3 nach oben ab.

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} \overbrace{2n}^{\text{I)}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} \overbrace{p}^{\text{II)}} \overbrace{\cdot}^{\text{III)}} \prod_{n < p \leq 2n} \overbrace{p}^{\text{II)}} \overbrace{}^{\text{I)}}$$

Die Anzahl von Faktoren im ersten Produkt ist kleiner gleich $\sqrt{2n}$.
Schätze das zweite Produkt mit (1) nach oben ab:

$$\prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \leq \prod_{p \leq \frac{2}{3}n} p \overbrace{\leq}^{(1)} 4^{\frac{2}{3}n - 1} < 4^{\frac{2}{3}n}$$

Im dritten Produkt sind alle Faktoren kleiner gleich $2n$. Bezeichne mit $P(n)$ die Anzahl der Primzahlen mit $n < p \leq 2n$.
Erhalte

$$\prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p < (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \cdot (2n)^{P(n)}.$$

Insgesamt also

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} < (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \cdot (2n)^{P(n)}.$$

Damit

$$4^{\frac{1}{3}n} < (2n)^{\sqrt{2n} + 1 + P(n)} \tag{2}$$

2.5 Finaler Beweisschritt

Forme (2) nun nach $P(n)$ um.

$$\Rightarrow \log_2(4^{\frac{1}{3}n}) < \log_2((2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)})$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}n < \log_2(2n)\cdot(\sqrt{2n}+1+P(n))$$
$$\Rightarrow \sqrt{2n}+1+P(n) > \frac{2n}{3\log_2(2n)}$$
$$\Rightarrow P(n) > \frac{2n}{3\log_2(2n)} - (\sqrt{2n}+1) \tag{3}$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\frac{2n}{3\log_2(2n)} > (\sqrt{2n}+1)$ für n groß genug, da dann $P(n) > 0$ und damit, da es eine ganze Zahl ist, $P(n) \geq 1$.
Zeige dies für $n \geq 2^9 = 512$. Zunächst ist

$$\sqrt{2n}+1 = \frac{(\sqrt{2n}-1)(\sqrt{2n}+1)}{\sqrt{2n}-1} = \frac{2n-1}{\sqrt{2n}-1}$$

Also genügt zu zeigen:

$$\frac{2n}{3\log_2(2n)} > \frac{2n}{\sqrt{2n}-1}\left(> \frac{2n-1}{\sqrt{2n}-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3\log_2(2n)} > \frac{1}{\sqrt{2n}-1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2n}-1 > 3\log_2(2n) \tag{4}$$

Für $n = 2^9$ ist die Aussage

$$2^5 - 1 > 3\log_2(2^{10})$$
$$\Leftrightarrow 31 > 30$$

also gültig. Für $n \geq 2^9$ vergleiche die Ableitungen von beiden Seiten. Dazu substituiere $x = 2n$. Da wir keine genaue Steigung bestimmen wollen und der Faktor, mit dem man bei beiden Ableitungen multiplizieren würde, 2 ist, stellt diese Substitution kein Problem dar. Es gilt $x \geq 2 \cdot 2^9 = 2^{10}$.

$$(\sqrt{x}-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(3\log_2(x))' = \frac{3}{\ln(2)}\cdot\frac{1}{x}$$

Zeige

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{3}{\ln(2)}\cdot\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{6}{\ln(2)}$$
$$\overbrace{\Leftrightarrow}^{x>0} x > \left(\frac{6}{\ln(2)}\right)^2 \approx 74,63$$

Also gilt (4) für $n \geq 2^9$. $\square$

3 Anhang

3.1 Verschärfung der Abschätzung von $P(n)$

Man kann (4) selbst noch beweisen, wenn man die rechte Seite leicht erhöht. Dies liefert eine genauere Abschätzung für $P(n)$.

$$\sqrt{2n} - 1 \geq \frac{21}{4} \log_2(2n) \quad \text{für} \quad n \geq 2^{11}.$$

Für $n = 2^{11}$ ist die Aussage

$$\begin{aligned} \sqrt{2^{12}} - 1 &\geq \frac{21}{4} \log_2(2^{12}) \\ \Leftrightarrow 2^6 - 1 &\geq 21 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow 63 &\geq 63 \end{aligned}$$

also gültig. Für $n \geq 2^{11}$ vergleiche die Ableitungen von beiden Seiten. Dazu substituiere wieder $x = 2n$, folglich $x \geq 2^{12} = 4096$.

$$(\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{21}{4} \log_2(x)\right)' = \frac{21}{4\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}$$

Zeige

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x}} &> \frac{21}{4\ln(2)} \cdot \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &> \frac{21}{2\ln(2)} \\ \overbrace{\Leftrightarrow}^{x>0} x &> \left(\frac{21}{2\ln(2)}\right)^2 \approx 229,47 \end{aligned}$$

Also gilt für $n \geq 2^{11}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2n} - 1 &\geq \frac{21}{4} \log_2(2n) \\ \Rightarrow \frac{4}{21 \log_2(2n)} &\geq \frac{1}{\sqrt{2n} - 1} \\ \Rightarrow \frac{8n}{21 \log_2(2n)} &\geq \frac{2n}{\sqrt{2n} - 1} > \frac{2n - 1}{\sqrt{2n} - 1} = \sqrt{2n} + 1 \\ \Rightarrow -(\sqrt{2n} + 1) &> -\frac{8n}{21 \log_2(2n)} \end{aligned}$$

Nach (3) haben wir

$$\begin{aligned} P(n) > \frac{2n}{3\log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1) &> \frac{2n}{3\log_2(2n)} - \frac{8n}{21\log_2(2n)} \\ &= \frac{14n}{21\log_2(2n)} - \frac{8n}{21\log_2(2n)} \\ &= \frac{6n}{21\log_2(2n)} = \frac{2}{7} \frac{n}{\log_2(2n)} \end{aligned}$$

Also gilt für $n \geq 2^{11}$

$$P(n) > \frac{2}{7} \frac{n}{\log_2(2n)}.$$

Das ähnelt dem Primzahlsatz:

$$\pi(n) := |\{p \in \mathbb{P} : p \leq n\}| \text{ verhält sich asymptotisch wie } \frac{n}{\ln(n)}.$$

Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln(n)} = 1.$$

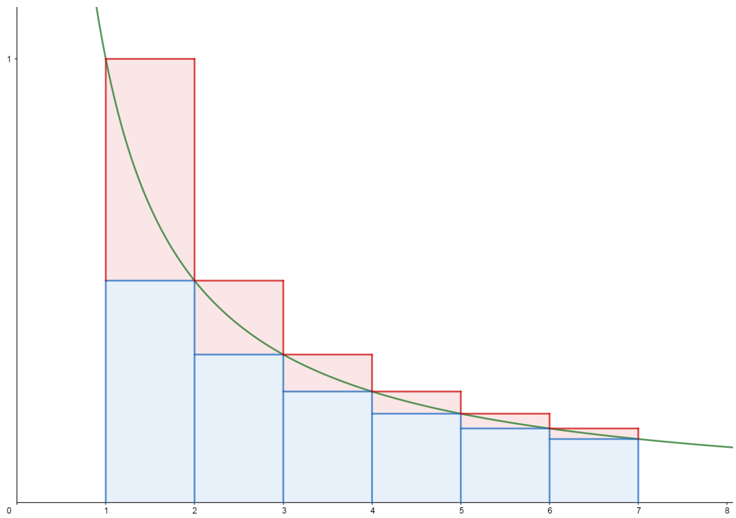
Dieses berühmte Resultat wurde 1896 zuerst von Jacques Hadamard und Charles Jean de la Vallée Poussin bewiesen. 1948 haben Atle Selberg und Paul Erdős einen elementaren, aber immer noch langen und komplizierten, Beweis gefunden.

3.2 Abschätzung durch Integrale

Man möchte die harmonischen Zahlen

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

abschätzen. Dazu betrachtet man H_n als Integral einer Treppenfunktion.



Hier entspricht $H_n - 1$ der blauen Fläche. $H_n - \frac{1}{n}$ entspricht der blauen und roten zusammen, mit Ausnahme des letzten Rechtecks.

Anhand dieser Skizze lässt sich erkennen, dass

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n)$$

und

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n).$$

Insgesamt erhält man

$$\ln(n) + \frac{1}{n} < H_n < \ln(n) + 1$$

Folglich also $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$ und die Wachstumsgeschwindigkeit von H_n ist durch $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ gegeben. H_n wächst also logarithmisch.

Es gibt aber bessere Abschätzungen, wie

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

Hierbei steht $O\left(\frac{1}{n^6}\right)$ für eine Funktion $f(n)$, die für ein konstantes $c > 0$ die Bedingung $f(n) \leq c\frac{1}{n^6}$ für alle n erfüllt.
γ bezeichnet die Euler-Mascheroni-Konstante:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln(n)) \approx 0,5772$$

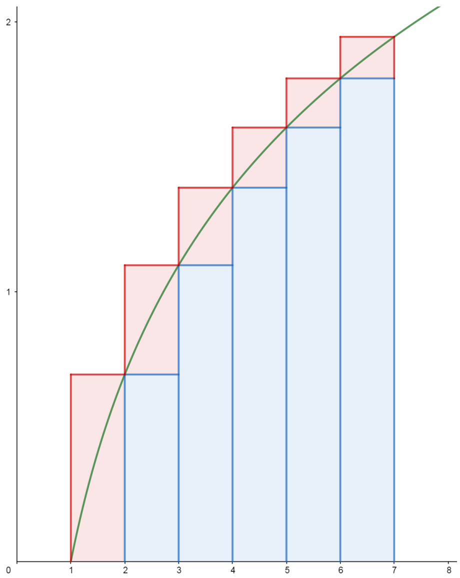
Diese entspricht in der Skizze der roten Fläche über dem Graphen.

3.3 Fakultäten abschätzen

Man möchte nun die selbe Methode wie bei den Integralen auf

$$\ln(n!) = \ln(2) + \ln(3) + ... + \ln(n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$$

anwenden.



Für $n = 7$ hier entspricht $\ln((n-1)!)$ der blauen Fläche (5 Rechtecke).
$\ln(n!)$ entspricht der blauen und roten zusammen (6 Rechtecke).

Anhand dieser Skizze lässt sich erkennen, dass

$$\ln((n-1)!) < \int_1^n \ln(t)dt$$

und

$$\ln(n!) > \int_1^n \ln(t)dt$$

Das Integral lässt sich leicht ausrechnen:

$$\int_1^n \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_1^n = n\ln(n) - n + 1$$

Exponiert man nun beide Ungleichungen, liefert dies

$$(n-1)! < e^{n\ln(n)-n+1}$$

$$\Rightarrow n! < ne^{n\ln(n)-n+1}$$

und

$$n! > e^{n\ln(n)-n+1}.$$

Dabei ist

$$e^{n\ln(n)-n+1} = \left(e^{\ln(n)}\right)^n \cdot \frac{e^1}{e^n} = n^n \cdot \frac{e}{e^n} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Insgesamt erhält man also

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Das ähnelt der Stirlingschen Formel, welche eine Aussage über das asymptotische Verhalten von $n!$ gibt:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Das heißt, wie zuvor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Es gibt aber bessere Abschätzungen, wie

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

4 Literatur

M. Aigner, G. M. Ziegler, Das Buch der Beweise. Springer, 5. Auflage. (S.9-15)